

WIEDERHOLUNGSAUFGABEN ANALYSIS A MIT LÖSUNGEN

Ableitungsaufgaben

Leiten Sie folgende Funktionen ab.

$$(1) e^x \left(1 - \sin^2(x)\right) \quad (2) \sin(e^{x^2}) \quad (3) \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad (4) x \cos(3^x)$$

Lösung.

- (1) Wir arbeiten von Aussen nach Innen und „lösen zuerst das Produkt auf“. Es folgt nach der Produktregel

$$\left(e^x(1 - \sin^2(x))\right)' = (e^x)'(1 - \sin^2 x) + e^x(1 - \sin^2 x)'$$

Jetzt wissen wir, dass $(e^x)' = e^x$ und müssen daher nur die Ableitung von $(1 - \sin^2 x)$ berechnen. Das folgt mittels der Kettenregel mit innerer Funktion $\sin x$ und äusserer Funktion $(\cdot)^2$ (oder der Produktregel, denn wir können auch $\sin^2 x = \sin x \cdot \sin x$ betrachten)

$$(\sin^2(x))' = 2 \sin(x) \cos(x).$$

Damit erhalten wir insgesamt nach Ausklammern von e^x :

$$e^x \left(1 - 2 \cos(x) \sin(x) - \sin^2(x)\right).$$

- (2) Wir betrachten zuerst die äussere Funktion $\sin(\cdot)$ und dann die innere Funktion e^{x^2} . Nach der Kettenregel gilt

$$(\sin(e^{x^2}))' = \cos(e^{x^2}) \cdot (e^{x^2})'$$

Nun ist $(e^{x^2})'$ wiederum nach der Kettenregel $e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x$. Zusammen ergibt sich somit

$$(\sin(e^{x^2}))' = 2x e^{x^2} \cos(e^{x^2}).$$

- (3) Hier bietet sich die Quotientenregel an. Setze $u = e^x + 1$ und $v = e^x - 1$. Dann ist $u' = e^x$ und $v' = e^x$ und die Quotientenregel liefert

$$\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Im Zähler kürzen sich die e^{2x} -Terme, es bleibt

$$\frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

Damit folgt

$$\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)' = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

- (4) Wir „lösen zuerst das Produkt auf“ und wenden die Produktregel an. Sei $f(x) = x$ und $g(x) = \cos(3^x)$. Dann ist $f'(x) = 1$ und

$$g'(x) = (\cos(3^x))' = -\sin(3^x) \cdot (3^x)'$$

Die Ableitung von 3^x finden wir durch den Trick, dass

$$3^x = e^{\ln(3^x)} = e^{x \ln(3)}.$$

Damit ist die Ableitung einfach $(3^x)' = 3^x \ln 3$. Somit

$$g'(x) = -\sin(3^x) 3^x \ln 3.$$

Die Produktregel gibt dann

$$(x \cos(3^x))' = 1 \cdot \cos(3^x) + x \cdot (-\sin(3^x) 3^x \ln 3).$$

Also

$$(x \cos(3^x))' = \cos(3^x) - x 3^x \ln 3 \sin(3^x).$$

Integral Aufgaben

Berechnen Sie die folgenden Integrale

$$(1) \int x e^{2x+1} dx \quad (2) \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (3) \int \frac{\sin x}{\cos x+1}$$

Lösung:

(1) Wir nutzen partielle Integration:

$$\int x e^{2x+1} = \frac{1}{2} e^{2x+1} x - \frac{1}{4} e^{2x+1} + C.$$

(2) Wir nutzen die Substitution $u = x^2$. Dann folgt $\frac{du}{dx} = 2x$ und es gilt

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{u+1} du = \ln|u+1| + C = \ln|x^2+1| + C.$$

(3) Wir verwenden die Substitution $u = \cos(x)$, woraus folgt, dass $\frac{du}{dx} = -\sin(x)$. Daher gilt

$$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)+1} dx = - \int \frac{1}{u+1} du = -\log|\cos(x)+1| + C.$$

Differentialgleichungen Aufgaben

Finden Sie die allgemeinen Lösungsfunktionen folgender DGLs:

$$(1) u'' + u' - 2u = -2x \quad (2) y' = xy^2 + x \quad (3) u'' - u = e^x$$

Hinweis zu (3): Achte auf den korrekten Ansatz bei der partikulären Lösung!

Lösung:

(1) Zunächst bestimmen wir die homogene Lösung. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \iff (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0.$$

Damit ist

$$u_{\text{hom}} = Ae^x + Be^{-2x}.$$

Da die rechte Seite ein Polynom ersten Grades ist, wählen wir als partikulären Ansatz

$$u_{\text{part}} = Cx + D.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$0 + C - 2(Cx + D) = -2x,$$

also

$$-2C = -2 \Rightarrow C = 1, \quad C - 2D = 0 \Rightarrow D = \frac{1}{2}.$$

(2) Zunächst bringen wir die Differentialgleichung in eine separierte Form

$$\frac{dy}{dx} = x(y^2 + 1).$$

Wir trennen die Variablen

$$\frac{1}{y^2 + 1} dy = x dx,$$

und integrieren anschließend beide Seiten

$$\int \frac{1}{y^2 + 1} dy = \int x dx.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$\arctan(y) = \frac{1}{2}x^2 + C \iff y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right).$$

Die Anfangsbedingung bestimmt die Konstante C .

(3) Die homogene Gleichung $u'' - u = 0$ besitzt das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1.$$

Daraus folgt

$$u_{\text{hom}} = Ae^x + Be^{-x}.$$

Da e^x bereits Lösung der homogenen Gleichung ist, wählen wir den Ansatz

$$u_{\text{part}} = Cxe^x.$$

Einsetzen ergibt

$$C = \frac{1}{2}.$$